



# 星星不簡單—— 探討條件下一筆畫 $n$ 層星之總畫法

此份報告作者：國立新竹女子高級中學 高二 14 班 陳昱伶

小論文作者：國立新竹女子高級中學 高二 14 班 梁芸嘉、陳昱伶、王若琰

本小論文旨在探討層層堆疊的星星，總畫法數是否會有規律地增加或減少，且增加的星星層數是否與總畫法數有關聯。我們帶著困惑與希望，開啟下列研究。

過程中我們曾失敗、曾想放棄，遇到瓶頸時不知所措，然有幸的是老師與我們攜手突破困境，向前邁進，累積嘗試和經驗，步步組織大綱、完善細節，使小論文完美呈現。

最後經數月努力及試驗，終得出一簡單式，證實了星星層數與總畫法數的關聯，解釋小論文討論之內容。





## 目錄

目錄	1
心得與省思	2
研究步驟	2
動機	2
目的	3
過程	3
成果	6
小論文正式文件 ( PDF 檔)	6
小論文專題分享 ( PDF 檔 )	6
附錄	6
國立新竹女子高級中學彈性學習時間學生自主學習計畫申請書	6
國立新竹女中彈性學習時間學生自主學習成果表	6



## 心得與省思

在製作小論文的過程中，我們歷經重重困境和瓶頸，努力突破限制，拓展更遼闊的想法，最終完成本篇小論文。完成報告後，以下是我認為可延續或需改進的省思：

### 一、架構分明，井然有序：

由解釋本論文所設之特定條件，再推導一層星的總畫法數，逐漸擴展至二層、三層、四層星，最後得出 n 層星的一般式。

### 二、排版、繪圖甚佳：

於繁雜處多以表格形式展現，一目瞭然；圖片、文字相輔相成，以利思考。

### 三、文字敘述有待加強，使思路、推導過程更清晰：

文字表達方面些許不足，應增加詞彙的運用、敘述句的流暢及邏輯性，方能在閱讀時順著脈絡思考此篇小論文。

### 四、內容與內容之間應具連貫性：

經老師提醒後，我發現未修改之前的內容思維過於跳躍，無法令他人明白其中意義，更使通篇小論文不知所云。經過細部修正後，能讓小論文的概念清晰易懂。

## 研究步驟

### 動機

現今的藝術風格多采而華麗，許多精緻的元素皆由對稱圖形組成。如同曾蔚為潮流的「禪繞畫」，層層堆疊的花兒，互相包圍著，優雅且絢麗。

平日裡繪畫的小星星，也可以以禪繞畫呈現完美的圖形。如同花兒一朵包圍著一朵。靈機一動，我們欲知一顆看似簡單的小星星是否有異於平常的畫法，而若將星星變得更複雜、加上層層堆疊的星星，總畫法數是否會有規律地增加或減少，且增加的星星層數是否與總畫法數有關聯呢？

帶著困惑與希望，我們開啟了下列的探討。



## 目的

- 一、計算一筆畫完成  $n$  層星圖形的總方法數  $a_n$ 。(  $n \in \mathbb{N}$  )
- 二、依本論文之條件下，筆的所到之層數與繪圖的特性與性質。
- 三、研究層數與畫法數之間的關聯。

## 過程

### 一、 思考主題之方向及大致內容。

110/03/02(二)	經過查詢資料後，我發現題目的難易度難以掌控，且須剔除已做過之方向，又更加深進度的困難。
--------------	---

### 二、 詢問師長關於題目之建議及預期成果。

110/03/04(四)	與老師討論後，認為原決定的主題含有過多未知性，不適合繼續發展，需更換主題。由於時間的壓力，需要盡快另想方案，使我們找尋過程中更加謹慎，也感到壓力頗大。
--------------	---

### 三、 閱讀數學相關之書籍，以利於主題之應用。

110/03/09(二)	這星期我們決定了主題「一筆畫畫完雙層星的方法」，嘗試著找尋各種資料輔佐我們探究其細節。我們運用巧思及相關文件，畫出更簡易的圖形，可能可使得計算過程中更加順遂。
--------------	---

### 四、 文獻探討:整理書中可用之內容至小論文中。

110/03/11(四)	我們找到了一篇科展，其主題的延伸與我們的「一筆畫星星」具有極大的關聯。然而如何巧妙地敘述於小論文中還有待我們思考。
--------------	---

### 五、 研究問題之解決方法。

星星不簡單——  
探討條件下一筆畫 n 層星之總畫法



110/03/16(二)	這段時間我們深入研究主題，一顆看似平凡的星星竟有 384 種方法可一筆畫畫完！但若是雙層星又更不一樣了，路線的選擇多元而複雜，所以以目前來說我們尚未找到方法可以計算。
--------------	---

## 六、 撰寫小論文格式與研究動機。

110/03/18(四)	我們認為多層星的樣貌與纏繞畫的構成十分相像，因此由此發想作為研究動機的內容。此外，我們也已編排好所有小論文的指定格式文字。
--------------	---

## 七、 研究主題，並計算問題內容。

110/04/01(四)	我們認為或許可將所有方法——分類，再觀察其脈絡，試著找出最後的結果。因此此週致力於分類雙層星的所有畫法。
110/04/08(四)	與老師討論後，因為原本的題目設定過於複雜，經謹慎思考後，決定先限縮題目方向，將題目的前提完整化，再繼續計算總方法數。
110/04/15(四)	這星期我們推論出可能的關係式，感覺小論文研究終於露出了第一絲邁向成功的曙光！原先我們十分擔心這個主題會像原定被淘汰的主題一樣，無法做出成果！幸好有老師的建議與指導，使我們知道何處下手較佳。
110/04/22(四)	我們發現之前的計算有誤，經幾次驗算後答案仍然不同。而且計算思路和算法算式都各有不同，目前覺得新算法沒有漏掉任何畫星星的發法。

## 八、 整理計算結果，並詢問師長。

110/04/29(四)	由於上週不確定計算的正確性，因此我們詢問老師的建議。老師認為我們的題目之前提模糊不清，應要先以文字敘述清楚，才繼續完成進度。然而我們在文字表達上有一定的困難，我們決定去找國文老師教導可用的詞彙及文句。
--------------	--

## 九、 研究主題，並計算問題內容。



110/05/06(四)	經歷重重困難，目前的任務除了細究星星的細節，還要完整敘述我們所畫出的特殊星星及其畫法的規則。另外，我們分析 n 層星之間的關係與異同。理想情況下，至少有兩種算法可驗證各個星星總畫法計算之無誤。
110/05/20(四)	長時間思考後，我們每次的想法都略有不同，我認為以後應該要把想法的細節詳細備註，才有利於研究。我們反覆計算後，逐漸推導出各畫法的公式，希望是正確的。
110/05/27(四)	這週有了學姊的幫忙，使得我們更有信心邁向下一步！我們重新計算第一層星星的畫法，並訂清楚規則，也知道第二層以後的星星之總畫法術呈現規律，並確定最完備的公式。

#### 十、 結果整理並向師長報告其內容及討論。

110/06/03(四)	我們把之前的構想放在小論文格式中，然而，如何連貫所有細項是一大難題。另外，精準的圖片也是關鍵。為使讀者可以更容易深入主題，應將每一細節簡顯易懂。並且我們與老師一起討論半完成品，希望能在各處盡善盡美。
--------------	---

#### 十一、 撰寫研究結果。

110/06/10(四)	目前我們大致已完成大綱的內容，然文件編輯出現問題，需要我們加以克服；我們也繼續將一些細部的文字和圖片進行修整，趨向完整，期待成品。
--------------	---

#### 十二、 撰寫研究結論及建議。

110/06/17(四)	我們遇到最大的問題，就是篇幅不夠。因此我們添增許多圖片、計算過程、詳細說明等等；另外，也將文字敘述變得更精準、更優美。小論文已大概成形，看著檔案十分有成就感，值得這段時間的努力。
--------------	---

#### 十三、 撰寫完成，總修改報告內容。



110/06/24(四)	終於完成全部的作品啦！也得到老師的認可與讚美！特別感謝老師這段時間的指導及組員的合作，使得作品在時間內完美產出！而我也覺得因為這場歷練，學習到更多數學知識及文字表達、團隊合作等，並更喜愛數學了！
--------------	---

## 成果

### 小論文正式文件 ( PDF 檔 )

<https://drive.google.com/file/d/1qXoWm0EBC86Uw5sqa42SrbD9E-fxfCGU/view?usp=sharing>

### 小論文專題分享 ( PDF 檔 )

<https://drive.google.com/file/d/1xW6ojQRYbXL-iPSLT-2TBsS5DasOOwLB/view?usp=sharing>

## 附錄

### 國立新竹女子高級中學彈性學習時間學生自主學習計畫申請書

詳見第七頁至第八頁

### 國立新竹女中彈性學習時間學生自主學習成果表

詳見第九頁至第十五頁

# 國立新竹女子高級中學彈性學習時間學生自主學習計畫申請書

2021/07/01 13:37

申請人	陳昱伶	班級/座號	2 年 14 班 21 號
申請學期	10902	申請時數	18
共學同學	214 810261 王若玟、214 810167 梁芸嘉		
計畫名稱	數學小論文		
學習類型	專題研究	對應學科屬性	數學
設備需求	無		
指導教師	邱士珊		
自主學習內容概述	因為熱愛數學，因此希望對數學有更深入的研究。		
預期效益	完成一篇由自己全程規劃且完備的小論文。		
與十二年國教核心素養之關聯	A1 身心素質與自我精進、A2 系統思考與解決問題、A3 規劃執行與創新應變、B1 符號運用與溝通表達、C2 人際關係與團隊合作		
成果展示	同意於校內學習平台提供自主學習成果與資料給其他同學參考		

週次	日期	課程	自學內容	自學場地
2	110/03/02(二)	自主學習	思考主題之方向及大致內容。	
2	110/03/04(四)	自主學習	詢問師長關於題目之建議及預期成果。	
3	110/03/09(二)	自主學習	閱讀數學相關之書籍，以利於主題之應用。	
3	110/03/11(四)	自主學習	文獻探討：整理書中可用之內容至小論文中。	
4	110/03/16(二)	自主學習	研究問題之解決方法。	
4	110/03/18(四)	自主學習	撰寫小論文格式與研究動機。	
6	110/04/01(四)	自主學習	研究主題，並計算問題內容。	
7	110/04/08(四)	自主學習	研究主題，並計算問題內容。	
8	110/04/15(四)	自主學習	研究主題，並計算問題內容。	
9	110/04/22(四)	自主學習	研究主題，並計算問題內容。	
10	110/04/29(四)	自主學習	整理計算結果，並詢問師長。	
11	110/05/06(四)	自主學習	研究主題，並計算問題內容。	
13	110/05/20(四)	自主學習	研究主題，並計算問題內容。	
14	110/05/27(四)	自主學習	研究主題，並計算問題內容。	
15	110/06/03(四)	自主學習	結果整理並向師長報告其內容及討論。	
16	110/06/10(四)	自主學習	撰寫研究結果。	
17	110/06/17(四)	自主學習	撰寫研究結論及建議。	
18	110/06/24(四)	自主學習	撰寫完成，總修改報告內容。	

以下為審查填寫欄，申請者勿填。

審查	<p><input checked="" type="checkbox"/>通過 <input type="checkbox"/>待修正 <input type="checkbox"/>不通過</p> <p>審查意見：</p> <p>認證：<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">邱士珊老師</span></p>
家長簽名	<p style="text-align: center;"></p>
學校核章	<p style="text-align: center;"><span style="border: 1px solid red; padding: 5px;">國立新竹女子高級中學 自主學習小組</span></p>

# 國立新竹女中彈性學習時間學生自主學習成果表

2021/07/01 13:41

申請人	陳昱伶	班級/座號	2 年 14 班 21 號
申請學期	10902	申請時數	18
共學同學	214 810261 王若玟、214 810167 梁芸嘉		
計畫名稱	數學小論文		
學習類型	專題研究	對應學科屬性	數學
設備需求	無		
指導教師	邱士珊		
自主學習內容概述	因為熱愛數學，因此希望對數學有更深入的研究。		
預期效益	完成一篇由自己全程規劃且完備的小論文。		
與十二年國教核心素養之關聯	A1 身心素質與自我精進、A2 系統思考與解決問題、A3 規劃執行與創新應變、B1 符號運用與溝通表達、C2 人際關係與團隊合作		
成果展示	同意於校內學習平台提供自主學習成果與資料給其他同學參考		

週次	日期	自學內容	檢核進度	學習心得	自學場地
2	110/03/02(二)	思考主題之方向及大致內容。	完全達標	經過查詢資料後，我發現題目的難易度難以掌控，且須剷除已做過之方向，又更加深進度的困難。 【作品連結網址】 無	
2	110/03/04(四)	詢問師長關於題目之建議及預期成果。	稍有落後	與老師討論後，認為原決定的主題含有過多未知性，不適合繼續發展，需更換主題。由於時間的壓力，需要盡快另想方案，使我們找尋過程中更加謹慎，也感到壓力頗大。 【作品連結網址】 無	
3	110/03/09(二)	閱讀數學相關之書籍，以利於主題之應用。	完全達標	這星期我們決定了主題「一筆畫畫完雙層星的方法」，嘗試著找尋各種資料	

				<p>輔佐我們探究其細節。我們運用巧思及相關文件，畫出更簡易的圖形，可能可使得計算過程中更加順遂。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
3	110/03/11(四)	<p>文獻探討:整理書中可用之內容至小論文中。</p>	完全達標	<p>我們找到了一篇科展，其主題的延伸與我們的「一筆畫星星」具有極大的關聯。然而如何巧妙地敘述於小論文中還有待我們思考。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
4	110/03/16(二)	<p>研究問題之解決方法。</p>	稍有落後	<p>這段時間我們深入研究主題，一顆看似平凡的星星竟有384種方法可一筆畫畫完！但若是雙層星又更不一樣了，路線的選擇多元而複雜，所以以目前來說我們尚未找到方法可以計算。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
4	110/03/18(四)	<p>撰寫小論文格式與研究動機。</p>	完全達標	<p>我們認為多層星的樣貌與纏繞畫的構成十分相像，因此由此發想作為研究動機的內容。此外，我們也已編排好所有小論文的指定格式文字。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
6	110/04/01(四)	<p>研究主題，並計算問題內容。</p>	完全達標	<p>我們認為或許可將所有方法一一分</p>	

				類，再觀察其脈絡，試著找出最後的結果。因此此週致力於分類雙層星的所有畫法。 【作品連結網址】 無	
7	110/04/08(四)	研究主題，並計算問題內容。	完全達標	與老師討論後，因為原本的題目設定過於複雜，經謹慎思考後，決定先限縮題目方向，將題目的前提完整化，再繼續計算總方法數。 【作品連結網址】 無	
8	110/04/15(四)	研究主題，並計算問題內容。	完全達標	這星期我們推論出可能的關係式，感覺小論文研究終於露出了第一絲邁向成功的曙光！原先我們十分擔心這個主題會像原定被淘汰的主題一樣，無法做出成果！幸好有老師的建議與指導，使我們知道何處下手較佳。 【作品連結網址】 無	
9	110/04/22(四)	研究主題，並計算問題內容。	完全達標	我們發現之前的計算有誤，經幾次驗算後答案仍然不同。而且計算思路和算法算式都各有不同，目前覺得新算法沒有漏掉任何畫星星的發法。 【作品連結網址】 無	
10	110/04/29(四)	整理計算結果，並詢問師長。	完全達標	由於上週不確定計算的正確性，因此	

				<p>我們詢問老師的建議。老師認為我們的題目之前提模糊不清，應要先以文字敘述清楚，才繼續完成進度。然而我們在文字表達上有一定的困難，我們決定去找國文老師教導可用的詞彙及文句。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
11	110/05/06(四)	研究主題，並計算問題內容。	完全達標	<p>經歷重重困難，目前的任務除了細究星星的細節，還要完整敘述我們所畫出的特殊星星及其畫法的規則。另外，我們分析n層星之間的關係與異同。理想情況下，至少有兩種算法可驗證各個星星總畫法計算之無誤。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
13	110/05/20(四)	研究主題，並計算問題內容。	完全達標	<p>長時間思考後，我們每次的想法都略有不同，我認為以後應該要把想法的細節詳細備註，才有利於研究。我們反覆計算後，逐漸推導出各畫法的公式，希望是正確的。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
14	110/05/27(四)	研究主題，並計算問題內容。	完全達標	<p>這週有了學姊的幫忙，使得我們更有信心邁向下一步！我們重新計算第一</p>	

				<p>層星星的畫法，並訂清楚規則，也知道第二層以後的星星之總畫法術呈現規律，並確定最完備的公式。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
15	110/06/03(四)	結果整理並向師長報告其內容及討論。	完全達標	<p>我們把之前的構想放在小論文格式中，然而，如何連貫所有細項是一大難題。另外，精準的圖片也是關鍵。為使讀者可以更容易深入主題，應將每一細節簡顯易懂。並且我們與老師一起討論半完成品，希望能在各處盡善盡美。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
16	110/06/10(四)	撰寫研究結果。	完全達標	<p>目前我們大致已完成大綱的內容，然文件編輯出現問題，需要我們加以克服；我們也繼續將一些細部的文字和圖片進行修整，趨向完整，期待成品。</p> <p>【作品連結網址】 無</p>	
17	110/06/17(四)	撰寫研究結論及建議。	完全達標	<p>我們遇到最大的問題，就是篇幅不夠。因此我們添增許多圖片、計算過程、詳細說明等等；另外，也將文字敘述變得更精準、更優美。小論文已大概成形，看</p>	

				著檔案十分有成就感，值得這段時間的努力。 【作品連結網址】 無
18	110/06/24(四)	撰寫完成，總修改報告內容。	完全達標	終於完成全部的作品啦！也得到老師的認可與讚美！特別感謝老師這段時間的指導及組員的合作，使得作品在時間內完美產出！而我也覺得因為這場歷練，學習到更多數學知識及文字表達、團隊合作等，並更喜愛數學了！ 【作品連結網址】 無

成果說明：文字

本小論文旨在探討層層堆疊的星星，總畫法數是否會有規律地增加或減少，且增加的星星層數是否與總畫法數有關聯。我們帶著困惑與希望，開啟下列研究。

過程中我們曾失敗、曾想放棄，遇到瓶頸時不知所措，然有幸的是老師與我們攜手突破困境，向前邁進，累積嘗試和經驗，步步組織大綱、完善細節，使小論文完美呈現。

最後經數月努力及試驗，終得出一簡單式，證實了星星層數與總畫法數的關聯，解釋小論文討論之內容。

成果說明：照片

小論文正式文件 (PDF 檔)

<https://drive.google.com/file/d/1qXoWm0EBC86Uw5sqa42SrbD9E-xfxCGU/view?usp=sharing>

小論文專題分享 (PDF 檔)

<https://drive.google.com/file/d/1xW6ojQRYbXL-iPSLT-2TBsS5Das00wLB/view?usp=sharing>

指導老師建議 (無則免填)	導師建議 (無則免填)	家長建議 (無則免填)

中華民國 110 年 7 月 1 日