

微積分先修計畫

MOOCS 線上自學

學校：新竹女中
作者：蔡昀錫
指導老師：張寶文

學習內容概述

透過清華大學線上自學網站以課外時間進行系統式的微積分學習、微積分於課程內的題目，使用不同種的方法進行解題，最終習得課程內的知識，並嘗試解開測驗的習題。而我們也期望能在每週一次的自主學習課程與課餘時間進行延伸學習。課程網址：

<https://mooc.nthu.edu.tw/classroom/news/40>

學習動機

我時常在計算各種物理及數學題目時，對於其原理感到困惑，例如我在學習萬有引力標準式時，就對於這個在x軸無限延伸的圖形面積很好奇，另外，我認為微積分是一個在數理方面很重要的工具，也對於這個未知的領域感到新奇。總上所述，我決定在高二下學期的期間嘗試自學微積分。

上課紀錄

1.5. THE PINCHING THEOREM AND TRIGONOMETRIC LIMITS

11

1.5 The pinching theorem and trigonometric limits (夾擠定理)

Theorem 1.5.1 (Pinching theorem) If $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, for all x with $0 < |x - c| < p$, $c \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, and $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$, then $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

Proof.

First since $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, st. if $0 < |x - c| < \delta_1$, then $|h(x) - L| < \varepsilon$.
So if $0 < |x - c| < \delta_1$, then $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$.
Then since $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_2 > 0$, st. if $0 < |x - c| < \delta_2$, then $|g(x) - L| < \varepsilon$.
So if $0 < |x - c| < \delta_2$, then $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$.
So $\forall \varepsilon > 0$, take $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Hence if $0 < |x - c| < \delta$,
then since $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, for all x with $0 < |x - c| < p$, $L - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < L + \varepsilon$.
So if $0 < |x - c| < \delta$, then $|f(x) - L| < \varepsilon$. So $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.

學習過程

剛開始學習時，有很多新的觀念像是極限、夾擠定理等，但隨著题目的練習，我漸漸能正確答出所以課堂習題，甚至應用在學校課業中！

學習過程

上課筆記

Sum rule: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \pm M$
constant multiple: $\lim_{x \rightarrow c} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \alpha L$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
常數 相乘
product rule: $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)g(x)) = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = L \cdot M$.
相乘
reciprocal rule: $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$
倒數
quotient rule: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{L}{M}$



學習過程

學習成果與反思

學習微積分後，我學到如何從數學的角度去看物理、統計等科目的定理及公式，像是活用微分與積分公式計算萬有引力公式和解決特殊的函式，並且用各種定理與探討其邏輯概念。而在計算各種例題時，我也會運用微積分中不同的定理來更快速精準地解題，像是使用二階導函數來驗算前面極值的正確性，不但透過交互計算與驗證各種題目，更能通透理解其圖形定義與關聯性。

其中有某些觀念，如隱函數微分對於我來說較難理解，不能透過冪法則直接計算，所以我碰到這類題目時，我會嘗試與同學共學與討論，最後也使我學會利用連鎖律將函式化簡，進而套入三角函數微分等公式計算。在這個過程除了能學會較複雜的定理外，我也非常享受與同學一起專注探究的氛圍。

為了檢驗這 12 周的學習成效，我每四周都會參與課程的期中期末考，其中的題目融合多種觀念，我也常常在思考題目的時候發現，比起直接計算更加簡易方便的解題途徑，例如：尤其是當題目結合微分與定積分兩種觀念時。而一次又一次的學習挑戰，也激起我更多的自信與興趣，最後我順利地通過了三次的考試，並取得 82 分的成績！

微積分 W11 Ex115-116 Q2 (單選題)

Let $S = \{x \in \mathbb{R} | x^2 < 9\}$, which of the following is the greatest lower bound of S ?

- ☐ -10
☐ 10
☐ 0
☒ -3
☐ 3

正確答案：

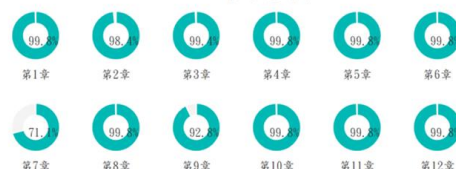
- -3

AI學習履歷

清教發 字號第 000008940號

茲證明 蔡昀鋒 Yun-Cheng Tsai 先生 /小姐 已修畢國立清華大學 2021-先修課程-微積分一(1-4月)課程整體 AI診斷分數 97分、課程 共計12週、學習影片36小時

影片完成率



各週學習狀況

各週AI診斷影片學習分數如下。

週次	綜合學力
第1週: Limit	99.8分
第2週: Continuity	98.4分
第3週: Differentiations	99.4分
第4週: Mean-value theorem	99.8分
第5週: Applications of the first and second derivatives	99.8分
第6週: Integrations	99.8分
第7週: Areas and volumes from the definite integrals	71.1分
第8週: The natural logarithm function	99.8分
第9週: The natural exponential function and the inverse trigonometric functions	92.8分
第10週: Integration by parts and the trigonometric identities	99.8分
第11週: The trigonometric substitution and the partial fractions	99.8分
第12週: L'Hopital's rule and improper integrals	99.8分

此證

教學發展中心主任

教務長

周學豐
焦偉全



中華民國110年07月07日

考核證書



國立清華大學清華雲課程修課證明

清教發雲字號第 10902008940 號

蔡昀錚 於 109 年參加本校磨課師課程「微積分一」(36 小時)，修習成績及格，特發給修課證明。

此證

教

師

顏東勇

教學發展中心主任

周香亭

教

務

長

焦偉全

中華民國 110 年 07 月 01 日

※不得作為清華大學學分採計之用

國立新竹女中彈性學習時間學生自主學習成果表

2021/07/07 19:05

申請人	蔡昀錚	班級/座號	2 年 17 班 29 號
申請學期	10902	申請時數	17
共學同學	217 林亭妘 810588		
計畫名稱	微積分線上自學計畫		
學習類型	學科課程延伸	對應學科屬性	數學
設備需求	無		
指導教師	張寶文		
自主學習內容概述	透過清華大學線上自學網站以課外時間進行系統式的微積分學習、微積分於課程內的題目，使用不同種的方法進行解題，最終習得課程內的知識，並嘗試解開測驗的習題。而我們也期望能在每週一次的自主學習課程與課餘時間進行延伸學習。 課程網址： https://mooc.nthu.edu.tw/classroom/news/40		
預期效益	1. 完成微積分的測驗題目。 2. 能靈活結合其他科目的題目進行多方面的解題與深入討論。 3. 增進與同儕之間的交流、討論及表達看法的能力。		
與十二年國教核心素養之關聯	A1 身心素質與自我精進、A2 系統思考與解決問題、B1 符號運用與溝通表達		
成果展示	同意於校內學習平台提供自主學習成果與資料給其他同學參考		

週次	日期	自學內容	檢核進度	學習心得
1	110/02/23(二)	撰寫自主學習企劃	完全達標	由於面對許多數學物理題目，需要用到微積分的概念，且想通透了解每個公式真正意涵即其推導的過程，因此我決定安排時間自主學習微積分，期望能透過數學的推導及證明讓我更了解題目邏輯與架構。 【作品連結網址】 https://mooc.nthu.edu.tw/classroom/chapter/40
2	110/03/02(二)	1. 極限的概念簡介 2. 連續與不連續的定義 3. 夾擠定理 4. 三角函數極限定理	完全達標	學習了不同於高中的極限定義，也花了很多時間才搞懂，因為到了後面的例題，我發現真的要理解其定義才能得出答案!而且看似普通的夾擠定理，卻能透過運算算出值，真的不可貌相~
3	110/03/09(二)	1. 三角函數極限定理	完全達標	結合了三角函數的概念，我發現許多和角差角公式在微積分

		2. 微分與連續 3. 微分四則運算 4. 二次微分 5. 鏈鎖律		中都會應用到，而且比起物理簡單的微分公式，我了解到了微分在圖形上的意義，以及計算後得到的數字的意義，真的受益良多！
4	110/03/16(二)	1. 三角函數微分 2. 三角函數鏈鎖律 3. 隱函數微分 4. 冪法則 5. 均值定理	完全達標	發現多設一個未知數卻能解出原本簡潔的式子，而且三角函數在微分上也有很多不同的性質，每個公式都由很基礎的定理推導而成，雖然公式很多，但我發現無論甚麼題目，都需要靈活運用公式才能解而不是死板得套公式而已。
5	110/03/23(二)	1. 洛爾定理 2. 遞增遞減函數 3. 局部極值	完全達標	學到透過線性變換判斷方程式的圖形以及極值點，雖然在運算時要先觀察方程式的各種條件是否符合定理，才能套上定理解題，但比起畫圖，更能快速準確地找出局部極值的值或是存在與不存在。
6	110/03/30(二)	1. 一階二階導函數 2. 絕對極值 3. 凹凸性 4. 反曲點	完全達標	我了解到二次微分的概念，其實就是將微分後的方程式再次微分，能得到除了遞增遞減、局部極值外的各種性質，且我也了解到開區間、閉區間對微分的重要性，不只要討論區間之內的點，區間兩邊的極值也要考慮到。
7	110/04/06(二)	1. 數列極限 2. 定積分 3. 微積分 4. 微積分第一次期中考	完全達標	這周的課程大多著重於計算，讓我除了了解微分最基礎的定理與公式外，還學習到了在計算多項式時，能更加快速計算出導函數，且也上到了微分與積分變換的基礎觀念。
8	110/04/13(二)	1. 微積分 2. 面積計算	完全達標	這周學到了將方程式積分的公式與其推導過程。而我也發現其實面積計算的概念就是將圖形切成極小的區塊，並將其相加，就可以得到不規則圖形的面積，而這裡在計算時也常需要運用前面的極限觀念！
9	110/04/20(二)	1. 不定積分與變數變換法	完全達標	這次更加延伸了上次的計算，提到旋轉體體積的算法，但途

		2. 旋轉體體積		中遇到了蠻多問題，因為方程式有很多種表達方式。變數可能是三角函數等等，所以在計算前都需要很多時間思考要如何切入，不過在遇到類似例題時，就能較快解題。
10	110/04/27(二)	1. 自然對數函數 2. 微積分第二次期中考	完全達標	這周結合了之前學的對數概念，並且學到了 $\ln$ 的用法，但我在計算 $\ln$ 時常常會卡在各種不次方的變數，為了解決問題，我在解題時，我通常會用畫圖的方式，能讓人更釐清要算的面積區塊，也會減少錯誤率！
11	110/05/04(二)	1. 自然指數函數 2. 任意次方	完全達標	這周課程更深入講解了 $\ln$ 的計算方式，所以比起上周，更能利用一些性質簡化原本複雜的方程式再進行計算。而這裡也加入了次方的概念，且將方程式導進程式後，會發現圖形越來越不規則。
13	110/05/18(二)	1. 分部積分 2. 三角函數恆等式	完全達標	這裡又結合了三角函數的觀念，我也發現微積分的計算跟三角函數息息相關，且各種公式與推導更為複雜，還需要用到和角差角等公式，所以我在這裡不只學到新的觀念，還又複習了一次過去的知識。
14	110/05/25(二)	1. 完全公設 2. 數列極限	完全達標	數列極限延伸了第一單元的極限概念，多了一些公式和定理，但我發現這裡的基礎還是最基本的極限定義，只是透過變數代換推導出各種公式，所以真的要透徹了解定義，而不是單純帶數字進去，才能在複雜的式子尋找切入點。
15	110/06/01(二)	1. 瑕積分 2. 數列極限例題	完全達標	這裡解釋了瑕積分與定積分的差別，不過瑕積分在判別其收斂與發散時，我常常會忽略一些重點，所以我有在網路上找一些類似題目來算，而我也發現真的是要多練習才能降低錯誤率！

16	110/06/08(二)	1. 三角代換法 2. 瑕積分例題	完全達標	我發現越到後面複雜的章節越需要釐清觀念，且這周課程有許多證明的地方，所以在學習此處時，我常常需要重新看過一遍積分定義，而真正思考過一遍計算過程也讓我在之後解題速度有明顯提升！
17	110/06/15(二)	1. 羅必達定理 2. 9~12 週進度複習	完全達標	這個定理其實就是極限定理的延伸，不過雖然是從極限定義出發，但我在計算時還是遇到了大難題，畢竟這完全不是帶數字可以解決的，所以有時候一題簡易的題目就要耗費很多時間去思考，不然第一次嘗試真的毫無頭緒。
18	110/06/22(二)	1. 反函數 2. 微積分期末考	完全達標	最後一周我選擇拿來複習前面的一些概念，並再作一次之前錯過的題目，我發現雖然一直在學習新的概念，但比較基礎的概念也會更加穩固，在計算一些以前覺得複雜的題目時，也會有不同、更快速的算法！

以下為審查填寫欄，申請者勿填。	
審查	☒ 通過 ☐ 待修正 ☐ 不通過 審查意見： 認證：張寶文老師
家長簽名	魏光霞
學校核章	國立新竹女子高級中學 自主學習小組